Ref $\bar{5}$
Dickson I p397

CR 83 (1876) → 1566
2812
2814

qui paraîtraient légitimes à un géomètre, ayant démontré la composition des forces appliquées en un point matériel, celle des forces parallèles, mais qui n'admettrait pas ou n'apercevrait pas que l'on a le droit de transporter une force en un point quelconque de sa ligne d'action. Ce que l'on étudie dans la théorie actuelle, c'est donc la Statique privée d'un des trois moyens que l'on possède pour réduire les forces au plus petit nombre possible.

» Je démontre qu'on peut toujours réduire les forces à trois, appliquées en trois points quelconques d'un plan déterminé qui a déjà été considéré sous le nom de *plan central*. On peut aussi les remplacer par quatre forces appliquées en quatre points quelconques du corps formant un tétraèdre. La direction de ces forces demeure invariable si le tétraèdre se déforme, ses faces tournant autour de leurs droites d'intersection avec le plan central.

» Quand le système des forces n'a pas de résultante générale, il y a, en général, comme je l'ai déjà dit, quatre et seulement quatre positions d'équilibre du corps. Elles se déduisent les unes des autres par des rotations de 180 degrés autour de trois droites rectangulaires. »

ANALYSE. — *Nouveaux théorèmes d'Arithmétique supérieure.* Note de M. Ed. Lucas.

« J'ai indiqué, dans diverses Communications précédentes (*), un nouveau procédé propre à la recherche des grands nombres premiers ou à la décomposition des grands nombres en leurs facteurs. La comparaison des séries récurrentes de Fibonacci et de Fermat, ou, plus généralement, des *fonctions numériques simplement périodiques*, donne lieu à beaucoup de théorèmes curieux, parmi lesquels nous citerons seulement les suivants :

» *I. — Soit le nombre*

$$p = 2^{4m+3} - 1,$$

dont l'exposant est supposé premier. On forme la série

1566 → $$3,\ 7,\ 47,\ 2207,\ \ldots \quad \text{avec} \quad r_{n+1} = r_n^2 - 2.$$

~~2207~~

Le nombre p est premier lorsque le rang du premier terme divisible par p occupe le rang $4m+2$; *le nombre p est composé si aucun des* $4m+2$ *premiers termes de la série n'est divisible par p; enfin, si* α *désigne le rang du premier terme di-*

(*) *Comptes rendus*, 10 janvier et 5 juin 1876. — *Atti della reale Accademia delle Scienze di Torino*, mai 1876.

visible par p, *les diviseurs de* p *sont de la forme linéaire* $2^{\alpha}k \pm 1$ *combinée avec celles des diviseurs de* $x^2 - 2y^2$.

» On prendra seulement les résidus par rapport au module p; ainsi, pour le nombre $2^{31} - 1$ que j'ai pris naguère pour exemple, r_{30} aurait, sans cette simplification, plus de *deux-cent millions* de chiffres, dans le système décimal. Le mécanisme dont j'ai parlé s'appliquera à tous les nombres de cette forme, et, avec quelques modifications, à ceux des formes suivantes, dont les calculs présentent, dans le système de numération binaire ou ternaire, des avantages considérables.

» *II. — Soit le nombre*

$$p = 3.2^{4m+3} - 1.$$

On forme les $4m + 3$ *premiers termes de la série*

$$2,\ 9,\ 161,\ 51841,\ \ldots \quad \text{avec} \quad r_{n+1} = 2r_n^2 - 1.$$

2812

extend

Le nombre p *est premier lorsque le rang du premier terme divisible par* p *est égal à* $4m + 3$; *le nombre* p *est composé si aucun des termes de la série n'est divisible par* p. *Si* α *désigne le rang du premier terme divisible par* p, *les diviseurs de* p *sont de la forme* $3.2^{\alpha}.k \pm 1$, *combinée avec celles des diviseurs de* $x^2 - 2y^2$ *et de* $x^2 - 6y^2$.

» *III. — Soit le nombre*

$$p = 2.3^{4m+2} + 1.$$

On forme les $4m + 2$ *premiers termes de la série*

$$4,\ 19,\ 5779,\ \ldots \quad \text{avec} \quad r_{n+1} = r_n^3 - 3r_n^2 + 3.$$

2813

Le nombre p *est premier lorsque le rang du premier terme divisible par* p *occupe le rang* $4m + 2$; *il est composé si aucun des* $4m + 2$ *premiers résidus n'est égal à zéro. Enfin, si* α *désigne le rang du premier résidu nul, les diviseurs de* p *sont de la forme linéaire* $2.3^{\alpha}.k \pm 1$, *combinée avec celles des diviseurs des formes quadratiques* $x^2 + 2y^2$ *et* $x^2 + 3y^2$.

» *IV. — Soit le nombre*

$$p = 2.3^{4m+2} - 1 \quad \text{ou} \quad p = 2.3^{4m+3} - 1.$$

On forme la série

$$2,\ 17,\ 5777,\ \ldots \quad \text{avec} \quad r_{n+1} = r_n^3 + 3r_n^2 - 3.$$

2814

Le nombre p *est premier lorsque le rang du premier résidu nul est égal à*

$4m + (2 \text{ ou } 3)$; *il est composé si aucun des $4m + (2 \text{ ou } 3)$ premiers termes n'est divisible par p. De plus, si α désigne le rang du premier résidu nul, les diviseurs de p ont la forme linéaire $2.3^{\alpha}.k \pm 1$, combinée avec celles des diviseurs de $5x^2 - 3y^2$ et de $x^2 - 2y^2$ dans le premier cas, et de $x^2 - 6y^2$ dans le second.*

» On observera que la différence des termes correspondants dans les deux séries précédentes est égale à 2.

» *Exemple.* — Pour $p = 2.3^7 - 1$, les résidus sont 2, 17, 1404, 0; donc p est premier, puisqu'il n'a pas de diviseur inférieur à sa racine carrée.

» *V. — Soit le nombre*

$$p = 2.5^{2m+1} + 1.$$

On forme la série limitée à $2m + 1$ termes

$$11,\ 167761,\ \ldots \quad \text{avec} \quad r_{n+1} = r_n^5 + 5r_n^3 + 5r_n.$$

Le nombre p est premier lorsque le rang du premier résidu nul est égal à $2m+1$; il est composé si aucun des termes n'est divisible par p. Enfin, si α désigne le rang du premier résidu égal à zéro, les diviseurs premiers de p sont de la forme $2.5^{\alpha}.k + 1$.

» On obtient des théorèmes analogues en remplaçant les nombres 2, 3 et 5 par des nombres premiers quelconques, en changeant la loi de formation de la série. On peut d'ailleurs augmenter les coefficients des puissances de 2, 3, 5 ou d'un nombre premier quelconque, d'un multiple de 10, sans changer les résultats précédents; mais il faut alors remplacer les deux premiers termes des séries récurrentes considérées précédemment. »

ANALYSE. — *Énoncés de divers théorèmes sur les nombres;* par M. F. Proth.

« I. — Un nombre premier n'est susceptible d'être décomposé en deux puissances semblables que quand l'*exposant* de ces puissances est de forme 2^k.

» II. — Si un nombre terminé par 7 est composé de 2 carrés, la *différence* entre les racines est plus grande que 2.

» III. — Si P est premier, le nombre $(2^P - 2)$ est *divisible* par P; mais non pas par P^2, ni P^3.

» IV. — Si deux nombres premiers P et P_1 sont donnés plus grands que 3, et tels que leur différence soit 2, je dis que la quantité $\left(\frac{P + P_1}{2}\right)$ ne peut être une *puissance exacte*.