

Resumen-completo-Tema-5.pdf



Sonico22



Variable Compleja



3º Grado en Matemáticas



**Facultad de Ciencias
Universidad de Málaga**

antes



**Descarga sin publi
con 1 coin**



Después

WUOLAH



Importante

Puedo eliminar la publi de este documento con 1 coin

¿Cómo consigo coins? → Plan Turbo: barato
→ Planes pro: más coins

30/3/2023

TEMA 5: INTEGRACIÓN COMPLEJA

VERSIONES SIMPLES DEL TEOREMA DE CAUCHY

PRIMITIVAS

Definición (Primitiva): Sea $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{C}$ abierto, $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Decimos que $F: \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es primitiva de f en \mathcal{R} si F es holomorfa en \mathcal{R} y $F' = f$ en \mathcal{R} .

Propiedades

① Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ es una serie de potencias con radio de convergencia igual a $R > 0$, entonces $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z-a)^{n+1}$ es primitiva de f en $\Delta(a, R)$ siendo F una serie de potencias holomorfa en $\Delta(a, R)$.

② Si F es primitiva de f en \mathcal{R} , entonces $F + \lambda$ es primitiva de f en \mathcal{R} para cualquier que sea $\lambda \in \mathbb{C}$.

③ Si $D \subset \mathbb{C}$ dominio y F, F_1 son primitivas de f en D , entonces $F_1 - F = \lambda = \text{cte}$ en D .
 $F_1 = F + \lambda, \lambda \in \mathbb{C}$.

④ La primitiva de $\frac{1}{z}$ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ es $\log z$.
¿Tiene $\frac{1}{z}$ primitiva en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$? NO.

⑤ **Proposición:** Sea $D \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ dominio. Entonces existe una rama de $\log z$ en D si y solo si $\frac{1}{z}$ tiene primitiva en D .

• Una vez dada una rama del $\log z$ (que tiene que ser continua automáticamente y derivable) $\psi'(z) = \frac{1}{z}$.
Se verifica $e^{\psi(z)} = z$.

⑥ **Generalización:** Sea D dominio en \mathbb{C} y sea $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa y nunca cero en D . Entonces existe una rama del $\log(f)$ en D si y solo si $\frac{f'}{f}$ tiene primitiva en D .

• Primitiva de e^z y e^{2z} en \mathbb{C} . Primitiva de $\frac{1}{z}$ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ es $\log z$ y $\frac{1}{z^{n+1}}$ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

• La teoría no es como en variable real (función continua tiene primitiva), aquí una función continua puede no tener primitiva en un dominio y eso que restringir dicho dominio.

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES COMPLEJAS DEFINIDAS SOBRE UN INTERVALO

Definición (Integral de una función continua sobre un intervalo real): Sea $[a, b]$ un intervalo en \mathbb{R} . Decimos que una función $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es integrable Riemann (algebraico) en $[a, b]$ si lo son $\operatorname{Re}(\varphi)$ y $\operatorname{Im}(\varphi)$, y en tal caso definimos

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b \operatorname{Re}(\varphi(x)) dx + i \int_a^b \operatorname{Im}(\varphi(x)) dx$$

WUOLAH

Escaneado con CamScanner

Notas

- ① **Linealidad:** Si $\varphi_1, \varphi_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ integrables, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Entonces $\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es integrable en $[a, b]$ y
- $$\int_a^b (\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2)(x) dx = \lambda_1 \int_a^b \varphi_1(x) dx + \lambda_2 \int_a^b \varphi_2(x) dx$$
- ② Si $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ integrable y $c \in (a, b)$, entonces φ es integrable en $[a, c]$ y en $[c, b]$ y
- $$\int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^c \varphi(x) dx + \int_c^b \varphi(x) dx$$
- ③ **Notación:** $\int_a^a \varphi(x) dx = 0$ $\int_a^b \varphi(x) dx = -\int_b^a \varphi(x) dx$
- ④ Si $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es integrable, entonces $\|\varphi\| = \sqrt{(\sup_{x \in [a, b]} |\varphi(x)|)^2 + (\inf_{x \in [a, b]} |\varphi(x)|)^2}$ es integrable en $[a, b]$ y
- $$\left| \int_a^b \varphi(x) dx \right| \leq \int_a^b \|\varphi(x)\| dx$$
- ⑤ Si φ es continua en $[a, b]$ (o continua salvo en un conjunto finito de puntos donde existen los límites laterales finitos) entonces φ es integrable en $[a, b]$
que es una acotada
- ⑥ Del TFC, si $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es derivable y φ' es integrable en $[a, b]$ entonces
- $$\int_a^b \varphi'(x) dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$
- Si φ es de clase C^1 a trozos en $[a, b]$, entonces φ' es integrable en $[a, b]$ y
- $$\int_a^b \varphi'(x) dx = \varphi(b) - \varphi(a) \quad \text{Regla de Barrow!}$$
- ⑦ **Cambio de variable:** Si $R: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^1 a trozos y $\varphi: \mathbb{C}([a, b]) \rightarrow \mathbb{C}$ es integrable en $\mathbb{C}([a, b])$ entonces
- $$\int_a^b \varphi(R(x)) R'(x) dx = \int_{R(a)}^{R(b)} \varphi(s) ds$$
- $s = R(x)$
 $ds = R'(x) dx$
- ⑧ **Integración por partes:** $\varphi, \psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ de clase C^1 a trozos, entonces
- $$\int_a^b \varphi(x) \psi'(x) dx = [\varphi(x) \psi(x)]_{x=a}^b - \int_a^b \varphi'(x) \psi(x) dx$$

CURVAS Y CAMINOS





























ya

CURVAS

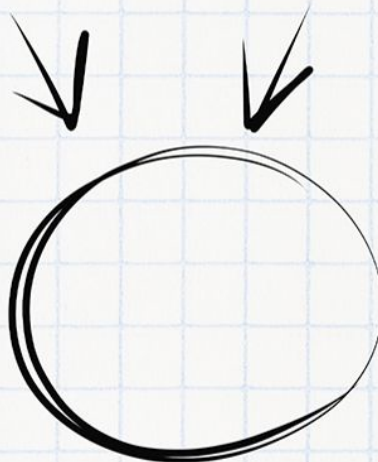
- Conjunto de todos los pares (t, φ) donde I es un intervalo compacto en \mathbb{R} y $\varphi: I \rightarrow \mathbb{C}$ es continua
- Definimos la relación R en \mathbb{C} : $(t, \varphi) R (s, \psi)$ si existe un homeomorfismo creciente $h: I \rightarrow J$ tal que $\varphi = \psi \circ h$. R es relación de equivalencia en \mathbb{C} .
- Definición (Curva):** Una curva en \mathbb{C} es un elemento de \mathbb{C}/R
- Cada representante de una curva $d \in \mathbb{C}/R$ se llama parametrización de d
- Cada homeomorfismo creciente relacionando dos parametrizaciones se llama cambio de parámetro

Imagínate aprobando el examen

Necesitas tiempo y concentración

| Planes |  PLAN TURBO |  PLAN PRO |  PLAN PRO+ |
|---|--|---|---|
|  Descargas sin publi al mes | 10  | 40  | 80  |
|  Elimina el video entre descargas |  |  |  |
|  Descarga carpetas |  |  |  |
|  Descarga archivos grandes |  |  |  |
|  Visualiza apuntes online sin publi |  |  |  |
|  Elimina toda la publi web |  |  |  |
|  Precios Anual <input type="checkbox"/> | 0,99 € / mes | 3,99 € / mes | 7,99 € / mes |

Ahora que puedes conseguirlo,
¿Qué nota vas a sacar?



WUOLAH

Las definiciones

1) Sea γ una curva en \mathbb{C} y sea $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una parametrización de γ . Entonces, podemos definir los siguientes elementos de γ independientes de φ .

1.1 Origen $(\gamma) = \varphi(a)$

1.2 Extremo $(\gamma) = \varphi(b)$

1.3 Segmento o trayectoria de γ , $\text{Seg}(\gamma) = \varphi([a, b])$ es la traza, es lo que se pinta de la curva en el plano

2) Una curva γ se dice simple si una parametrización cualquiera de γ es inyectiva (todas las demás parametrizaciones son inyectivas).

Nota: Si $\varphi_1: [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi_2: [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{C}$ son continuas e inyectivas con $\varphi_1(a_1) = \varphi_2(a_2)$, $\varphi_1(b_1) = \varphi_2(b_2)$, y $\varphi_1([a_1, b_1]) = \varphi_2([a_2, b_2])$, entonces representan a la misma curva simple (o sea, una curva simple tiene el mismo origen, el mismo extremo y el mismo segmento, entonces son la misma curva).

3) Una curva γ se dice cerrada si Origen $(\gamma) = \text{extremo}(\gamma)$ como en el caso D

4) Decimos que γ es una curva de Jordan si para cualquier parametrización $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ se tiene que $\varphi(a) = \varphi(b)$ y φ es inyectiva en $[a, b]$.

5) El segmento $[\gamma_1, \gamma_2]$ de origen $\gamma_1 \in \mathbb{C}$ y extremo $\gamma_2 \in \mathbb{C}$ puede ser parametrizado por $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi(t) = \gamma_1 + t(\gamma_2 - \gamma_1)$

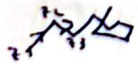
6) La circunferencia $C(z_0, r)$ de centro $z_0 \in \mathbb{C}$ y radio $r > 0$, se puede recorrer $z_0 + r$ recorriendo una sola vez en sentido antihorario (sentido positivo) puede ser parametrizada por $\varphi: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi(t) = z_0 + r e^{it}$. Si damos dos vueltas, la parametrización es en $[0, 4\pi]$. En el sentido horario sería $\varphi(t) = z_0 + r e^{-it}$.

7) Suma de curvas: Si $([a_1, b_1], \varphi_1)$ y $([a_2, b_2], \varphi_2)$ son dos parametrizaciones de dos curvas γ_1 y γ_2 respectivamente, si tenemos extremo $(\gamma_1) = \text{origen}(\gamma_2)$, entonces la aplicación dada por $\varphi(t) = \varphi_1(t)$ o $\varphi_2(t)$:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t) & \text{si } t \in [a_1, b_1] \\ \varphi_2(t - b_1 + a_2) & \text{si } t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2] \end{cases}$$

definida y continua en $[a_1, b_2] := [a_1, b_1] \cup [b_1, b_1 + b_2 - a_2]$, luego es parametrización de una curva γ de origen $\varphi(a_1) = \varphi_1(a_1) = \text{origen}(\gamma_1)$, extremo $\varphi(b_2) = \varphi_2(b_2 - b_1 + a_2) = \varphi_2(b_2) = \text{extremo}(\gamma_2)$ y segmento $\text{Seg}(\gamma) = \varphi([a_1, b_2]) = \text{Seg}(\gamma_1) \cup \text{Seg}(\gamma_2)$

8) Poligonal de vértices z_1, z_2, \dots, z_n recorrida en este orden, es la curva suma de segmentos de segmentos entre vértices en el orden prescrito: $[\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n] = [\gamma_1, \gamma_2] + [\gamma_2, \gamma_3] + \dots + [\gamma_{n-1}, \gamma_n]$



9) Curva opuesta: Si γ es una curva parametrizada por $([a, b], \varphi)$, entonces la curva opuesta es parametrizada por $\tilde{\gamma}: [-b, -a] \rightarrow \mathbb{C}$, $\tilde{\gamma}(t) = \varphi(-t)$. Origen $(-\gamma) = \text{extremo}(\gamma)$, extremo $(-\gamma) = \text{origen}(\gamma)$, $\text{Seg}(-\gamma) = \text{Seg}(\gamma)$, $-\gamma = \gamma$.

Nota: γ y $(-\gamma)$ no son partes, es una curva cerrada de origen y extremo igual al origen. El segmento igual a $\text{Seg}(\gamma)$, solo que recorrida una vez en un sentido y luego de vuelta en el sentido inverso. En integración sobre curvas podemos cancelarlas.

3.2 FUNCIONES DE VARIACIÓN ACOTADA CURVAS RECTIFICABLES CAMINOS

Definición (variación de una función respecto de una partición, variación total, función de variación

acotada: Sea $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una función.

• Para una partición de $[a, b]$, $\Pi := \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ definimos la **variación de φ respecto de la partición Π** como $V_{\Pi}(\varphi, \Pi) := \sum_{j=1}^n |\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})|$

• La **variación total de φ en $[a, b]$** se define como $V_{[a, b]}(\varphi) := \sup \{V_{\Pi}(\varphi, \Pi) : \Pi \text{ partición de } [a, b]\}$

• Decimos que φ es de **variación acotada** en $[a, b]$ si $V_{[a, b]}(\varphi) < \infty$ (que sea finito).
 Si el coseno no está acotado superiormente el número es ∞ .

Notas y resultados

1. No se dice φ sea continua ~~real~~ (no continua)
2. Si φ es continua, entonces es una parametrización de una curva γ . Entonces $V_{\Pi}(\varphi, \Pi) = \sum_{j=1}^n \text{long}([z_{j-1}, z_j])$ extendiendo por $\text{long}([z_1, z_2]) = |z_2 - z_1|$.
 La longitud de la poligonal
 y partición más fina
3. Si $\Pi_1 \subset \Pi_2$ entonces $V_{\Pi_1}(\varphi, \Pi_1) \leq V_{\Pi_2}(\varphi, \Pi_2)$
4. Si $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ y $[c, d] \subset [a, b]$, entonces $V_{[c, d]}(\varphi) \leq V_{[a, b]}(\varphi)$. Si más $x \in [c, d]$, entonces $V_{[a, b]}(\varphi) = V_{[a, c]}(\varphi) + V_{[c, d]}(\varphi) + V_{[d, b]}(\varphi)$
5. Si $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ y $\gamma: [c, d] \rightarrow [a, b]$ es homeomorfismo, entonces $V_{[c, d]}(\varphi \circ \gamma) = V_{[a, b]}(\varphi)$.
 El homeomorfismo puede ser creciente o decreciente. Basta que sea invertible.
6. φ es de V.A. en $[a, b]$ si y solo si $\varphi \circ \gamma$ es de V.A. en $[c, d]$
7. Si $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es monótona, entonces φ es de V.A.
8. $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es de V.A. si y solo si φ es diferencia de dos funciones crecientes.
9. Hay funciones continuas que no son de V.A. Por ejemplo, $\varphi: [-\frac{\pi}{2}, 0] \rightarrow \mathbb{C}$, dada por $\varphi(x) = x + i \tan x$, si $-\frac{\pi}{2} \leq x < 0$ y $\varphi(0) = 0$.
10. Si $\varphi \in C^1([a, b])$, entonces φ es de V.A. en $[a, b]$ y $V_{[a, b]}(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(x)| dx$ la longitud del camino.
11. Si $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es de clase C^1 a través de $[a, b]$, entonces φ es de variación acotada en $[a, b]$ y $V_{[a, b]}(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(x)| dx$.

Importante

Puedo eliminar la publi de este documento con 1 coin

¿Cómo consigo coins? → Plan Turbo: barato
→ Planes pro: más coins

pierdo espacio



Necesito concentración

ali ali ooh
esto con 1 coin me
lo quito yo...

WUOLAH

Definición (Longitud de una curva, curva rectificable, camino): Sea γ una curva en \mathbb{R}^n . Definimos

• la longitud de γ como $\text{Long}(\gamma) = \sup_{\mathcal{P}} \sum_{i=1}^n |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|$, donde $[a, b], \mathcal{P}$ es una partición cualquiera de γ

• Decimos que γ es rectificable si $\text{Long}(\gamma)$ es finita

• Decimos que γ es camino si admite una parametrización de clase C^1 a trozos en $[a, b]$

Notas

① $\text{Long}(\gamma)$ es independiente de la parametrización

② Todo camino es rectificable

③ Si γ es una curva, entonces $\text{Long}(\gamma) = \text{Long}(-\gamma)$ porque parametrizaciones de γ y $-\gamma$ están conectadas por homeomorfismos

④ Si γ_1 y γ_2 son dos curvas y definimos $(\gamma)_+ = \gamma_1 + \gamma_2$, entonces podemos hablar de $\gamma_1 + \gamma_2$ y se cumple $\text{Long}(\gamma_1 + \gamma_2) = \text{Long}(\gamma_1) + \text{Long}(\gamma_2)$



INTEGRACIÓN SOBRE CAMINOS

Definición (Integral de una función sobre un camino): Sea γ un camino y f una función continua sobre $\text{Sup}(\gamma)$. Definimos la integral de f a lo largo de γ como

$$\int_{\gamma} f(x) dx = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

donde $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una parametrización de clase C^1 a trozos de γ

Lema: Si $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es de clase C^1 a trozos y f es continua sobre $\gamma([a, b])$, entonces

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}))$$

P es el conjunto de todas las particiones de $[a, b]$ y para $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ $\in P([a, b])$, se define $\|P\| = \max_{1 \leq i \leq n} |t_i - t_{i-1}|$ y $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) (\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}))$

$S(f, \gamma, P)$

Lema: Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 a trozos y f una función continua sobre $\gamma([a, b])$. Si $\phi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ es un homeomorfismo creciente, entonces

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S(f, \gamma \circ \phi, P) = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

• La definición dada anteriormente no depende de la parametrización elegida

• La definición de integral de una función a lo largo de un camino se basa en aquella otra de integral de una función sobre un intervalo real.

WUOLAH

Escaneado con CamScanner

Notas

① $\int_C (pf + pg) dz = \int_C pf dz + \int_C pg dz$

② Si γ es un camino en \mathbb{C} y f es continua a lo largo de γ entonces para $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ parametrización de γ a través de t , $\tilde{\gamma}: [-b, a] \rightarrow \mathbb{C}$, $\tilde{\gamma}(t) = \varphi(-t)$ se tiene a través $(\tilde{\gamma}'(t) = -\varphi'(-t))$ y $\int_{-\gamma} f(z) dz = -\int_{\gamma} f(z) dz$

③ Si podemos escribir $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$, entonces $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz$

Utilidad: Hacer irrelevante el origen a la hora de integrar sobre caminos cerrados
 ⤷ lo igual es que punto empezamos (el signo determina la orientación)

④ **Regla de Barrow:** Si γ es un camino en \mathbb{C} y f es derivable en un entorno de $\gamma(t)$ entonces $\int_{\gamma} f'(z) dz = f(\text{extremo}(\gamma)) - f(\text{origen}(\gamma))$

⑤ **Anotación de la integral:** $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \max_{z \in \gamma(t)} |f(z)| \cdot \text{long}(\gamma)$ (Todos los caminos tienen longitud finita)

⑥ **Intercambio de la integral y el límite:** Si $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ uniformemente en $\gamma(t)$, entonces $\int_{\gamma} f dz = \int_{\gamma} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n dz$

⑦ **Intercambio de la integral y serie:** Si $\sum f_n$ converge uniformemente a f en $\gamma(t)$ $\int_{\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz$

Definición (Otro integral de camino): Sea γ un camino en \mathbb{C} representado por una parametrización $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ de clase C^1 a través, y sea f una función continua en $\gamma(t)$. Definimos:

Integral de f respecto del elemento (eudóteo) de longitud de arco ds :

$$\int_{\gamma} f(z) |dz| = \int_a^b f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt$$

$$\text{long}(\gamma) = \int_{\gamma} |dz|$$

Integrales de f respecto de los componentes real e imaginaria de z :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\varphi(t)) \operatorname{Re} \varphi'(t) dt$$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\varphi(t)) \operatorname{Im} \varphi'(t) dt$$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dx + i \int_{\gamma} f(z) dy$$

• Los integrales a lo largo de caminos distintos (y no se conoce la función) son distintos

Definición (Integral independiente del camino): Sea D un dominio de \mathbb{C} y sea $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ continua. Decimos que la integral de f es independiente del camino en D si para todo par de puntos $z_1, z_2 \in D$ se tiene que para cualquier par de caminos γ_1, γ_2 en D con $\text{origen}(\gamma_1) = z_1$ y $\text{extremo}(\gamma_1) = z_2$ y

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

Equivalentemente, la integral de f es independiente del camino en D si $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ para todo camino cerrado γ en D .

Teorema (Equivalencia entre tener primitiva y tener integral independiente del camino): Sea D un dominio en \mathbb{C} y sea $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ continua. Son equivalentes:

i) La integral de f es independiente del camino en D

ii) f tiene primitiva en D

Si $n \in \mathbb{Z}$ con $n \neq 0$, entonces z^n tiene primitiva en \mathbb{C} ($\neq \frac{z^{n+1}}{n+1}$) $\rightarrow \int_\gamma z^n dz = 0$ para todo camino cerrado γ en \mathbb{C}

$\int_\gamma P(z) dz = 0$ para todo γ camino cerrado en \mathbb{C} y todo polinomio P

Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ es una serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$ entonces $\int_\gamma f(z) dz = 0$ para cualquier γ que sea el camino cerrado γ en $\Delta(a, R)$

Si $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$, z^n tiene primitiva en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ($\neq \frac{z^{n+1}}{n+1}$). Además, $\int_\gamma z^n dz = 0$ para cualquier camino cerrado γ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (los que alzan del 0)

$\frac{1}{z}$ no tiene primitiva en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Entonces existen caminos cerrados γ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $\int_\gamma \frac{1}{z} dz \neq 0$

4.1 INDICE DE UN PUNTO RESPECTO DE UN CAMINO CERRADO

Definición (Índice de un punto respecto de un camino cerrado): Si γ es un camino cerrado,

definimos para $z \notin \text{Im}(\gamma)$ el índice de z respecto de γ como

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\xi - z} d\xi$$

= n.º de vueltas netas que γ da alrededor de z

Nota: $n(\gamma, z)$ también se conoce a veces como $\text{Ind}_\gamma(z)$, es una función de z , con $z \in \mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$, y denota el número de vueltas netas que γ da al rodear de z , luego solo toma valores enteros.

Teorema: Sea γ un camino cerrado en \mathbb{C} . Entonces:

i) Para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$, $n(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$

ii) $n(\gamma, \cdot)$ es una función continua en $\mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$, luego es constante en cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$

iii) Si z está en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$ entonces $n(\gamma, z) = 0$

El soporte de γ es compacto y está acotado

EL TEOREMA DE CAUCHY PARA DOMINIOS CONVEXOS

Definición: Sea $D \subseteq \mathbb{C}$. Decimos que D es convexo si para todo $z_1, z_2 \in D$ el segmento $[z_1, z_2] \subseteq D$.

Segmento sin orientación: $[z_1, z_2] = \{t z_1 + (1-t) z_2 : t \in [0, 1]\}$

Segmento con orientación: $[z_1, z_2] : \varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \quad \varphi(t) = (1-t)z_1 + t z_2$

Triángulo T de vértices $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$: $\Pi = \overline{CO} \cup [z_1, z_2] \cup [z_2, z_3] \cup [z_3, z_1] = \{t_1 z_1 + t_2 z_2 + t_3 z_3 : t_1, t_2, t_3 \in [0, 1], t_1 + t_2 + t_3 = 1\}$

 triángulo cerrado convexo. Pasa por cualquier punto z_1, z_2, z_3 . Basta que estén en el plano $x+y+z=1$.

Entendemos por ∂T el contorno que rodea a T . Si $T = \overline{CO} \cup [z_1, z_2] \cup [z_2, z_3] \cup [z_3, z_1]$

$\partial T = [z_1, z_2] + [z_2, z_3] + [z_3, z_1]$ Contorno orientado
se define como un camino

A efectos de integración, si f es continua en ∂T ,

$$\int_{\partial T} f(z) dz = \int_{[z_1, z_2]} f(z) dz + \int_{[z_2, z_3]} f(z) dz + \int_{[z_3, z_1]} f(z) dz = \int_{\partial T} f(z) dz$$

Teorema de Cauchy para triángulos: Sea $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{C}$ abierto, sea $P \in \mathcal{R}$ y sea T un triángulo en \mathcal{R} . Sea $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continua en \mathcal{R} y derivable en \mathcal{R} (i.e.). Entonces

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0$$

Siempre que base un triángulo en \mathcal{R} , la integral sobre el borde es 0

Teorema de Cauchy para dominios convexos: Sea $D \subseteq \mathbb{C}$ un dominio convexo. Sea $P \in D$ y sea $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ continua en D y derivable en D (i.e.). Entonces $\int_{\partial} f(z) dz = 0$ para todo camino cerrado γ en D .

Notas

① Si D es dominio convexo en \mathbb{C} , $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ continua en D y $\int_{\partial T} f(z) dz = 0$ para todo triángulo T en D \rightarrow entonces f tiene primitiva en D (o.e.) $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$, para todo camino cerrado γ en D .


Consecuencia: f es derivable en D \iff Teorema de Morera para triángulos.

② El Teorema de Cauchy es también cierto para dominios estrellados. D es dominio estrellado respecto a un punto z_0 si para cada $z \in D$, el segmento $[z_0, z] \subseteq D$.

D dominio convexo $\implies D$ dominio estrellado. También cierto para dominios simplemente conexos (sin agujeros).

③ En D dominios generales el Teorema de Cauchy no es cierto. Ej: $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $\int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \neq 0$

④ El Teorema de Cauchy puede aplicarse a veces si que el dominio sea convexo, si no es así.

Utilizamos este tipo de caminos:  $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \frac{2\pi i}{n}$

Importante

Puedo eliminar la publi de este documento con 1 coin

¿Cómo consigo coins? → Plan Turbo: barato
→ Planes pro: más coins

perdo espacio



Necesito concentración

ali ali ooh
esto con 1 coin me
lo quito yo...

WUOLAH

⑤ **Existencia de conjugada armónica en dominios convexos:** Si D es un dominio convexo y $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ es armónica, entonces u tiene conjugada armónica en D .

⑥ **Corolario:** Si u es armónica en el abierto Ω , entonces u es localmente la parte real de una función holomorfa (porque los discos son dominios convexos).

⑥ LA FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY PARA DOMINIOS CONVEXOS

Teorema (Fórmula integral de Cauchy para dominios convexos): Sea $D \subseteq \mathbb{C}$ un dominio convexo. Sea $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en D . Sea γ un camino cerrado en D . Para cada $z \in D$ for γ , tenemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

⑥.1 CONSECUENCIAS INMEDIATAS DE LA F. I. CAUCHY

• Cambiar caminos por homotopía → la integral se convierte a media integral

Teorema (Propiedad del valor medio para funciones holomorfas): Sea f holomorfa en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Sean $a \in \Omega$ y $r > 0$ tales que $\Delta(a, r) \subseteq \Omega$. Entonces:

i) **Sobre circunferencias:** $f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta$, para todo $r \in (0, r)$

ii) **Sobre discos:** $f(a) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\Delta(a, r)} f(z) dA(z)$, para todo $r \in (0, r)$

Corolario (Propiedad del valor medio para funciones armónicas): Sea u armónica en el abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y sean $a \in \Omega$ y $r > 0$ tales que $\Delta(a, r) \subseteq \Omega$. Entonces:

i) **Sobre circunferencias:** $u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta}) d\theta$, $r \in (0, r)$

ii) **Sobre discos:** $u(a) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\Delta(a, r)} u(z) dA(z)$, $r \in (0, r)$

Teorema (Forma débil del Principio del Módulo Máximo): Sea f holomorfa en el abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Si $|f|$ alcanza un máximo local en $a \in \Omega$, entonces f es constante en un entorno de a .

Corolario (Forma débil del Principio del Módulo Mínimo para funciones holomorfas): Sea Ω abierto de \mathbb{C} , $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Supongamos que f nunca vale cero en Ω . Si $|f|$ alcanza un mínimo local en $a \in \Omega$, entonces f es cte en un entorno de a .

Corolario (Forma débil del principio del máximo y del mínimo para funciones armónicas): Sea u una función armónica en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$.

i) Si u alcanza un máximo local en $z_0 \in \Omega$, entonces u es cte en un entorno de z_0 .

ii) Si u alcanza un mínimo local en $z_0 \in \Omega$, entonces u es cte en un entorno de z_0 .

WUOLAH

ANALITICIDAD DE LAS FUNCIONES HOLOMORFAS

Teorema (Diferenciación bajo el signo integral): $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto, γ continuo en \mathbb{C} .
 Supongamos $R: \text{Dom}(\gamma) \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ satisface:

- R es continua en $\text{Dom}(\gamma) \times \Omega$
- Para cada $\xi \in \text{Dom}(\gamma)$, la función $R_\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $R_\xi(z) = R(\xi, z)$ es holomorfa en Ω
- La función $H: \text{Dom}(\gamma) \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $H(\xi, z) = \frac{\partial}{\partial z} R(\xi, z)$ es continua en $\text{Dom}(\gamma) \times \Omega$

Entonces, $F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $F(z) = \int_\gamma R(\xi, z) d\xi$ es holomorfa en Ω y para $z \in \Omega$,

$$F'(z) = \int_\gamma \frac{\partial}{\partial z} R(\xi, z) d\xi$$

Caso especial: $R(\xi, z) = \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z}$

- continua en $\text{Dom}(\gamma) \times (\mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma))$
- holomorfa respecto de z 2o variable en $\mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$
- $\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^2}$ es continua en $\text{Dom}(\gamma) \times (\mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma))$

Por tanto, $F(z) = \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z} d\xi$ integral de Cauchy de φ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$ y

$$F'(z) = \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi$$

Análisis: Desarrollable a serie de potencias

En un camino el soporte siempre es compacto

Teorema (Analiticidad de la integral de Cauchy): Sea γ continuo en \mathbb{C} , φ función continua en $\text{Dom}(\gamma)$. Consideremos la integral de Cauchy de φ , $F(z) = \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z} d\xi$, $z \in \mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$.
 Entonces F es analítica en $\mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$. Además, para $a \in \mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$,

$$F^{(n)}(a) = n! \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi$$

Las funciones holomorfas son analíticas, infinitamente derivables y desarrollable a serie de potencias al entorno de cualquier punto.

Derivada Logarítmica: $\frac{f'}{f}$ Si $f = g \cdot h$, $\frac{f'}{f} = \frac{g'}{g} + \frac{h'}{h}$

Teorema (Analiticidad de las funciones holomorfas): Sea f holomorfa en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Entonces f es analítica en Ω . Esto es, $\forall a \in \Omega$, f es desarrollable a serie de potencias alrededor de a , con radio de convergencia al menos $R = \text{dist}(a, \mathbb{C} \setminus \Omega)$

distancia entre un punto en Ω donde f es holomorfa y el borde, donde f no es holomorfa



Nota: Coeficiente de Taylor n -ésimo de f en a :

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi$$

$\gamma \in (0, 2\pi)$

Teorema (Fórmula integral para la derivada n-ésima en dominios conexos): Sea D dominio conexo en \mathbb{C} , f holomorfa en D , γ camino cerrado en D . Entonces

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad \text{para todo } z \in D \text{ con } \gamma \in \Gamma$$

• Ahora función analítica = función holomorfa

• Radio de convergencia en cada punto: al menos el máximo en cada punto



CONSECUENCIAS DE LA ANALITICIDAD DE FUNCIONES HOLOMORFAS

Teorema (Singulicidad evitable): Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto, $p \in U$, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ continua en U y holomorfa en $U \setminus \{p\}$. Entonces, f es holomorfa en U .

• Puntos aislados donde la continuidad pero no holomorphicidad desaparecen

Teorema: Si f es holomorfa en el abierto $U \subseteq \mathbb{C}$, entonces $\operatorname{Re}(f)$ y $\operatorname{Im}(f)$ son funciones armónicas en U de clase C^∞

Corolario: Si u es armónica en el abierto $U \subseteq \mathbb{C}$, entonces $u \in C^\infty(U)$

Teorema de Morera: f continua en el abierto $U \subseteq \mathbb{C}$, suponemos $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ para todo camino cerrado γ en U . Entonces f es holomorfa en U .

Teorema de Morera para triángulos: Sea f continua en el abierto $U \subseteq \mathbb{C}$. Suponemos que $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ siempre que γ sea triángulo (sólido) contenido en U . Entonces f es holomorfa en U .
↳ con el interior

• Holomorphicidad y propiedad local

• Para probar que f es holomorfa encontrar una primitiva

Teorema de Liouville: Si f es entera y acotada, entonces f es constante y holomorfa en todo \mathbb{C}

Corolario (También Teorema de Liouville): Si f es entera y no cte, entonces $f(\mathbb{C})$ es denso en \mathbb{C} .

↳ si tomamos disco, dentro se él hay puntos de $f(\mathbb{C})$. No hay huecos

EXAMEN

Teorema (También Teorema de Liouville): f entera y acotada $d \geq 0, m \geq 0$ y $n \geq 0$ tales que $|f(z)| \leq M|z|^n$ para todo $z \in \mathbb{C}$ con $|z| \geq R_0$ ($\rightarrow |f| = O(|z|^n)$ as $|z| \rightarrow \infty$)
Entonces f es un polinomio de grado a lo sumo n .

↳ Si f entera y se comporta como un polinomio \rightarrow es un polinomio



SUCESIONES DE FUNCIONES HOLOMORFAS

La holomorfía se conserva por la convergencia normal

Definición (Convergencia normal, o uniforme en compactos): Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas en un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$, y sea $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ una función. Decimos que $\{f_n\}$ converge normalmente a f en D (o que $f_n \rightarrow f$ uniformemente en compactos) si y sólo si para todo compacto $K \subset D$, $f_n \rightarrow f$ unif. en K . O sea, \forall para cada compacto $K \subset D$, y cada $\varepsilon > 0$, existe $n_K \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_K$ entonces $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ para todo $z \in K$.

Si la función límite no se exige a priori nada. El límite normal de una sucesión de funciones holomorfas es continuo.

Lema (Convergencia uniforme en compactos es equivalente a convergencia local uniforme): Convergencia normal en $D \Leftrightarrow$ convergencia uniforme en todos los compactos de $D \Leftrightarrow$ convergencia localmente uniforme en D

Convergencia local uniforme: Para cada $z_0 \in D$, existe $r_0 > 0$ tal que $\Delta(z_0, r_0) \subset D$ y $\{f_n\}$ converge a f uniformemente en $\Delta(z_0, r_0)$ cuando $n \rightarrow \infty$

Teorema de Convergencia de derivadas: $D \subseteq \mathbb{C}$ dominio, $\{f_n\}$ sucesión de funciones holomorfas en D que converge normalmente a $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, f es continua en D . Entonces f es holomorfa en D . Es más, $\{f_n^{(m)}\}$ sucesión de derivadas m -ésimas converge normalmente a $f^{(m)}$ en D para cada $m \in \mathbb{N}$



RAMAS HOLOMORFAS DE LOGARITMOS Y RAÍCES

Teorema: $D \subseteq \mathbb{C}$ dominio, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa y nunca cero en D .

a) Si θ es rama del $\log(f)$ en D , entonces cualquier otra rama del $\log(f)$ en D se de la forma $\theta + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$ (se que D es conexo)

b) Existe rama del $\log(f)$ en $D \Leftrightarrow \frac{f'}{f}$ tiene primitiva en $D \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$ para todo camino cerrado γ en D

En este caso, si G es primitiva de $\frac{f'}{f}$ en D , entonces existe un $c \in \mathbb{C}$ tal que $G + c$ es rama holomorfa del $\log(f)$ en D .

Nota: $\frac{f'}{f}$ es la derivada logarítmica de f , la cual tiene sentido siempre que f sea holomorfa y nunca cero. Tienen los siguientes reglas

$$\left(\frac{f \cdot g}{h}\right)' = \frac{f'g + fg' - \frac{f'g}{h} - \frac{fg'h}{h^2}}{\left(\frac{f \cdot g}{h}\right)^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\left(\frac{f \cdot g}{h}\right)' = \frac{f'g + fg' - \frac{f'g}{h} - \frac{fg'h}{h^2}}{\left(\frac{f \cdot g}{h}\right)^2}$$

Importante

Puedo eliminar la publi de este documento con 1 coin

¿Cómo consigo coins? → Plan Turbo: barato
→ Planes pro: más coins

pierdo espacio



Necesito concentración

ali ali ooh
esto con 1 coin me
lo quito yo...

WUOLAH

Teorema: Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. $D \subseteq \mathbb{C}$ dominio. $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa y nunca cero

a) Si g es una rama del log(f) en D , entonces $h: z \mapsto e^{ng}$ es una rama de $\sqrt[n]{f}$ en D y cualquier otra rama de $\sqrt[n]{f}$ en D es de la forma h multiplicada por una raíz n -ésima de 1. Si D es conexo

b) Si h es una rama de $\sqrt[n]{f}$ en D , entonces f es holomorfa en D y $f' = \frac{f'}{n h^{n-1}}$ en D
 $h^n = f \rightarrow n h^{n-1} h' = f' \rightarrow h' = \frac{f'}{n h^{n-1}}$

c) Si existe una rama de $\sqrt[n]{f}$ en D , entonces para todo camino cerrado γ en D ,
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$
 es un múltiplo entero de n

Nota: Si γ es un camino parametrizado por $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ (de clase C^1 a trozos), y h es holomorfa en $\text{Int}(\gamma)$, entonces $h \circ \varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ vuelve a ser de clase C^1 a trozos y representa a un camino T que se puede llamar **el camino imagen de γ mediante h** , y que a veces se denota como $T = h \circ \gamma$. Observamos que si cambiamos de parametrización φ a $\psi \circ \varphi$, entonces obtenemos un cambio de parametrización en T de la forma $h \circ \psi \circ \varphi$

En esta misma línea, si $T = h \circ \gamma$ es un camino que no pasa por 0, tiene sentido hablar de la variación del argumento a lo largo de T , lo que da lugar a la definición de la **variación del argumento de h a lo largo de γ** como

$$\text{Var}_{\gamma} \arg h = \text{Var}_{h \circ \gamma} \arg w$$

WUOLAH

Escaneado con CamScanner